DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 4 heures

Option MP-MP*

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Soit n un entier strictement positif. Dans tout le problème, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{K}^n$ du produit scalaire usuel associé à la base canonique notée $\mathcal{B}_c = (e_1, \ldots, e_n)$ dans les deux cas.
Précisément, si $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ sont des éléments de $\mathbb{K}^n$, on note

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad < x, y >= \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \beta_k \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

les produits scalaires respectifs. Les normes associées sont notées $\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >}$.
De même, pour $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_\infty = \max\{|\alpha_k|,\ 1 \leq k \leq n\}.$$

Si $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ avec $a_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, on identifie la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $(a_1, \ldots, a_n)$.
Cela permet d'identifier $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $(\mathbb{K}^n)^n$.

Dans tout le problème on note $\omega = exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, $\overline{\omega} = \omega^{-1} = exp\left(-\frac{2i\pi}{n}\right)$ et

$$\forall j \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \Omega_j = \sum_{k=1}^{n} \omega^{j(k-1)} e_k.$$

I – Première partie

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Etablir que la famille $\mathcal{B} = (\Omega_0, \ldots, \Omega_{n-1})$ est libre. En déduire qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{C}^n$. Par la suite, on notera $F = (\Omega_0, \ldots, \Omega_{n-1})$. C'est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
2. Calculer F^2. En déduire la valeur du déterminant de F^2 puis celle de $|det(F)|$.
3. A quelle classe de matrices F appartient-elle ? En déduire F^{-1}.

4. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, un élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré au plus $n-1$. On pose

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \dots & \alpha_{n-4} & \alpha_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Etablir que la matrice C est diagonalisable.

5. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. A l'aide de ce qui précède, expliciter une méthode simple permettant de calculer un développement du produit $(x+y+z)(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz)$ dans lequel n'intervient plus le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (il ne reste finalement que 4 monômes).

6. Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que la matrice Δ est diagonalisable et identifier ses valeurs propres.

II – Deuxième partie

On rappelle ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz

pour tout (x, y) de $(\mathbb{K}^n)^2$ on a : $| < x, y > | \leq ||x||_2 ||y||_2$.

1. Etude des bases bi-orthogonales.
   On considère $(x_1, \dots, x_n)$, une base de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ (c'est à dire un élément du dual de $\mathbb{K}^n$). Démontrer l'existence d'un unique élément z de $\mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \phi(x) =< z, x > .$$

   (b) Etablir l'existence de n vecteurs $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ tels que

$$\forall y \in \mathbb{K}^n, \ y = \sum_{k=1}^{n} < x_k^*, y > x_k.$$

   Montrer que la famille $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ est unique et libre.
   On dit que $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ est la base bi-orthogonale de $(x_1, \dots, x_n)$.
   (c) Montrer que la base bi-orthogonale est l'unique famille $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}^n$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad < z_i, x_j >= \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j. \end{cases}$$

   (d) Décrire la base bi-orthogonale d'une base orthonormée.
   (e) On suppose que pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $\|x_k\|_2 = 1$. Etablir que pour tout $1 \leq k \leq n$ $\|x_k^*\|_2 \geq 1$.

(f) Toujours sous l'hypothèse $\|x_k\|_2 = 1$ pour $1 \leq k \leq n$, montrer que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \|x_k^*\|_2 = 1 \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ est une base orthonormée.}$$

(g) On note à nouveau $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ la base bi-orthogonale de $(x_1, \ldots, x_n)$. Que dire de la base bi-orthogonale de $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$?

2. Soit $B_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n \ / \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \|x_k\|_2 \leq 1\}$. On définit sur B_2 la fonction φ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = |det(x_1, \ldots, x_n)|^2$.

(a) Etablir l'existence d'un élément $(z_1, \ldots, z_n)$ de B_2 tel que
$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \sup_{(x_1, \ldots, x_n) \in B_2} \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$
Montrer que $\|z_k\|_2 = 1$ pour $1 \leq k \leq n$.
On note $(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ la base bi-orthogonale de $(z_1, \ldots, z_n)$ et $\alpha_n = \varphi(z_1, \ldots, z_n)$.

(b) Montrer, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, l'égalité $\|z_k^*\|_2 = 1$.

(c) En déduire la valeur de α_n ainsi qu'une caractérisation simple des éléments de B_2 pour lesquels φ atteint son maximum.

3. On pose cette fois $B_\infty(\mathbb{C}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{C}^n)^n \ / \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \|x_k\|_\infty \leq 1\}$. On définit sur $B_\infty(\mathbb{C})$ la fonction ψ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\psi(x_1, \ldots, x_n) = |det(x_1, \ldots, x_n)|^2$.

(a) Etablir l'existence de $(a_1, \ldots, a_n) \in B_\infty(\mathbb{C})$ atteignant la borne supérieure de ψ sur $B_\infty(\mathbb{C})$.
On note $\beta_n(\mathbb{C}) = \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Pour tout $1 \leq j \leq n$ on pose $a_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$.

(b) Montrer que $\beta_n(\mathbb{C}) \leq n^n$.

(c) Etablir que si $\beta_n(\mathbb{C}) = n^n$, alors $(a_1, \cdots, a_n)$ est une base orthogonale et que pour tout couple (i, j) de $\{1, \ldots, n\}^2$ on a $|a_{ij}| = 1$.

(d) Déterminer la valeur de $\beta_n(\mathbb{C})$ ainsi qu'une caractérisation simple des éléments de $B_\infty(\mathbb{C})$ pour lesquels ψ atteint son maximum.

4. On note θ la restriction de ψ à $B_\infty(\mathbb{R}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \ / \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \|x_k\|_\infty \leq 1\}$ et $\beta_n(\mathbb{R})$ la borne supérieure de θ sur $B_\infty(\mathbb{R})$.

(a) Calculer $\beta_1(\mathbb{R})$, $\beta_2(\mathbb{R})$ et $\beta_4(\mathbb{R})$.

(b) Etablir que $\beta_3(\mathbb{R}) < 27$.

(c) Etablir l'existence de $(a_1, \ldots, a_n) \in B_\infty(\mathbb{R})$, avec $a_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$ pour $1 \leq j \leq n$, tel que
$$\theta(a_1, \ldots, a_n) = \beta_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \ |a_{ij}| = 1.$$
Indication : si on note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $(x_1, \ldots, x_n) \in B_\infty(\mathbb{R})$ tel que $\theta(x_1, \ldots, x_n) = \beta_n(\mathbb{R})$, on pourra considérer $\theta((x_1, \ldots, x_n) + tE_{ij})$ lorsque cette quantité est définie.

(d) En déduire la valeur de $\beta_3(\mathbb{R})$.

5. Pour tout entier n strictement positif on note $\mathbf{H}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales dont les coefficients sont à valeurs dans $\left\{-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$.

(a) Soit un entier $n > 1$ tel que $\mathbf{H}_n \neq \emptyset$. Etablir l'existence d'un élément $H = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathbf{H}_n$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$ on ait $h_{i1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. En déduire que n est pair.

(b) Montrer que si $n > 2$ et $\mathbf{H}_n$ est non vide, alors n est en fait un multiple de 4.

(c) Montrer par récurrence que $\mathbf{H}_n$ est non vide lorsque n est une puissance de 2. Avec les notations de la question 4, en déduire la valeur de $\beta_n(\mathbb{R})$ lorsque n est une puissance de 2.